1.22) $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{bmatrix}$

Para que exista $x \in \mathbb{C}^2$ tq $Ax = b$ debe cumplirse que $b \in col(A)$

Es decir que:

$$\begin{bmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha + i\beta = 2-3i \rightarrow \boxed{\alpha = 2}, \boxed{\beta = -3} \\ i\alpha - \beta = 3+2i \rightarrow \alpha = 2, \beta = -3 \end{cases}$$

Por lo que $b \in col(A)$ ✓

Busco las soluciones de $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + i x_2 = 2-3i \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3 \\ i x_1 - x_2 = 3+2i \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3 \end{cases}$$

como había visto antes. (solución por tanteo)

Por lo que $x_P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ahora busco sol. del homogéneo asociado:

$$\begin{cases} x_1 + i x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -i x_2 \\ i x_1 - x_2 = 0 \rightarrow i(-i x_2) - x_2 = 0 \rightarrow x_2 - x_2 = 0 \checkmark \end{cases}$$

Por lo que $x_H = gen\left\{ \begin{matrix} -i \\ 1 \end{matrix} \right\}$

Entonces $\boxed{X = x_P + x_H = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + gen\left\{ \begin{matrix} -i \\ 1 \end{matrix} \right\}}$

TODAS LAS SOLUCIONES.

Buscar base de col(A):

$col(A) = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i\\-1\end{bmatrix}\right\}$

Vemos que $\begin{bmatrix}i\\-1\end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$, por lo que son LD y una base puede ser:

$\boxed{B_{col(A)} = \left\{\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\right\}}$

Buscar base de fil(A):

$fil(A) = gen\underbrace{\left\{\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i\\-1\end{bmatrix}\right\}}_{col(A^T)}$

IDEM ANTERIOR $\rightarrow$ $\boxed{B_{fil(A)} = \left\{\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\right\}}$

Buscar base de Nul(A):

Nul(A), por lo calculado antes: $Nul(A) = gen\left\{\begin{matrix}-i\\1\end{matrix}\right\}$ por lo que

$\boxed{B_{Nul(A)} = \left\{\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}\right\}}$

Buscar base de $Nul(A^T)$:

Como $A = A^T \rightarrow$ $\boxed{B_{Nul(A^T)} = B_{Nul(A)} = \left\{\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}\right\}}$